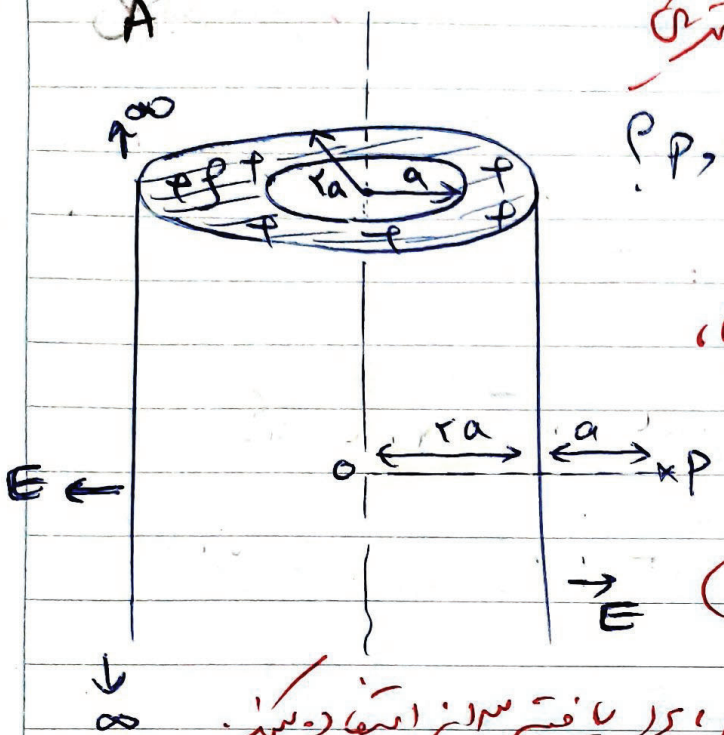
$\frac{19}{A}$

حل مثال‌های داده شده از فصل پتانسیل الکتریکی

مثال ۱۴: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقطه‌ی O و P؟



حل:

ابتدا باید میدان الکتریکی تمام نواحی، داخل ($r<a$)، $a<r<2a$ و $r>2a$ را داشته باشیم.

(زیرا نقطه‌ی O درون استوانه و نقطه‌ی P بیرون است. پس میدان تمامی نواحی لازم است)

* چون استوانه‌ی بار، طولی است، از قانون گاوس برای یافتن میدان استفاده می‌کنیم.

$$\rightarrow \underset{\text{اندازه}}{E} = \begin{cases} 0 & : r<a \\ \dfrac{\rho(r^2-a^2)}{2\varepsilon_0 r} & : a<r<2a \\ \dfrac{\rho 3a^2}{2\varepsilon_0 r} & : r>2a \end{cases}$$

* برای محاسبه میدان الکتریکی در ناحیه $a<r<2a$: سطح گاوسی استوانه‌ای به طول l، هم‌محور با استوانه‌ی بار، به شعاع $a<r<2a$ زده و قانون گاوس استفاده می‌شود:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \rho = \frac{q}{V}$$

$$0+0+E(2\pi r l) = \frac{\rho[\pi r^2 - \pi a^2]l}{\varepsilon_0} \rightarrow \underbrace{E = \frac{\rho(r^2-a^2)}{2\varepsilon_0 r}}_{a<r<2a} \quad \hat{i}$$

* برای محاسبه میدان الکتریکی در ناحیه $r>2a$: سطح گاوسی استوانه‌ای به طول l، هم‌محور با استوانه‌ی بار، به شعاع $r>2a$ زده و قانون گاوس استفاده می‌شود:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow 0+0+E(2\pi r l) = \frac{\rho(\pi b^2 - \pi a^2)l}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{\rho(b^2-a^2)}{2\varepsilon_0 r} \xrightarrow{b=2a} \underbrace{E = \frac{\rho 3a^2}{2\varepsilon_0 r}}_{r>2a} \quad \hat{i}$$

ادامه مثال ۱۴ :

* حال به دنبال محاسبه اختلاف پتانسیل بین دو نقطه O و P :

$$V_P - V_O = -\int_O^P \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad : \text{III}$$

$$= -\int_0^a \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_a^{2a} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{2a}^P \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= 0 - \int_a^{2a} \frac{\rho(r^2-a^2)}{2\varepsilon_0 r}\,dr - \int_{2a}^P \frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\,dr$$

$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}r^2 - a^2\ln r\right]_a^{2a} - \frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln r\Big|_{2a}^{P=3a} =$$

$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[2a^2 - a^2\ln 2a - \frac{a^2}{2} + a^2\ln a\right] - \frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{3a}{2a} =$$

$$= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[\frac{3}{2}a^2 - a^2\ln 2\right] - \frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{3}{2}$$

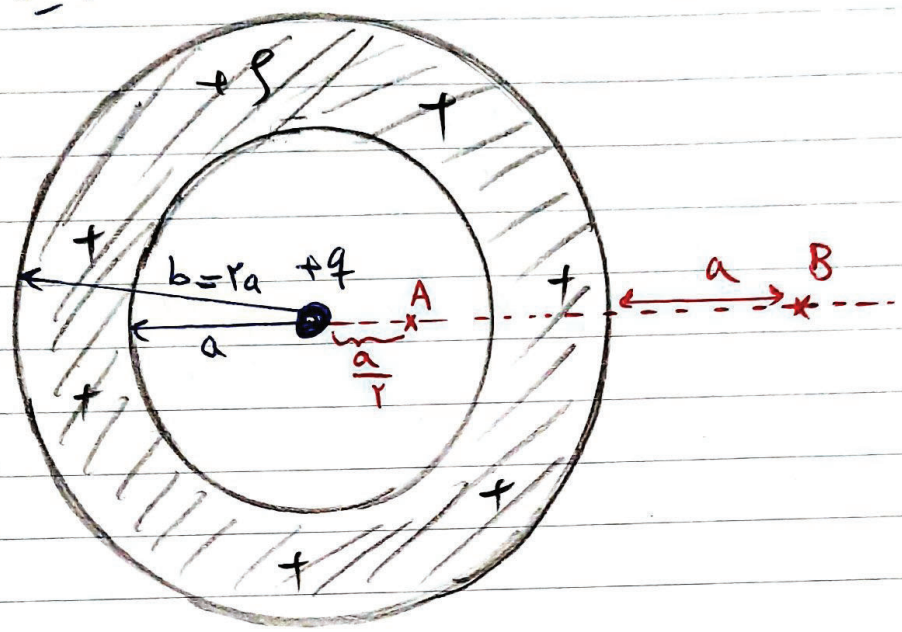
$$= -\frac{3\rho a^2}{4\varepsilon_0} + \underbrace{\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln 2} - \frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln 3 + \underbrace{\frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln 2}$$

$$= -\frac{3\rho a^2}{4\varepsilon_0} + \frac{2\rho a^2}{\varepsilon_0}\ln 2 - \frac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln 3$$

تمام

$\frac{19}{C}$

مثال ۱۵: پوسته کروی با چگالی بار ρ و (نارسانا)
بار $+q$ نقطه‌ای در مرکز کره قرار دارد.
الف: میدان الکتریکی در تمام فضا؟ ب: اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B؟



حل:

برای الف: از قانون گاوس استفاده کرده و برای ناحیه‌های $r<a$ ، $a<r<b$ و $r>b$ ، میدان را حساب کنید

$$r<a: \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{+q}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}}$$

$$a<r<b: \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q + \rho\left[\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right]}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{q + \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - a^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$$r>b: \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q + \rho\left[\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right]}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{q + \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$b=2a$

ب:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad : \text{III}$$

$$= -\int_{A=\frac{a}{2}}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{a}^{b=2a} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{b=2a}^{B=2a} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Subject :

$\frac{19}{5}$

ادامه مثال ۱۵ : $b = 2a$

$$V_B - V_A = -\int_A^a \frac{kq}{r^2}\,dr - \int_a^{2a} \frac{q + \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - a^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr - \int_{2a}^{3a=B} \frac{q + \frac{4}{3}\pi\rho(b^3 - a^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= +kq\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{a/2}^{a} - kq\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{a}^{2a} - \frac{1}{6\varepsilon_0}\rho r^2\Big|_{a}^{2a} + \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{a}^{2a}$$

$$+ kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{2a}^{3a} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(b^3 - a^3)\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{2a}^{3a} = \quad ; b = 2a$$

$$= \underset{\text{عدد}}{\underline{\quad}}$$

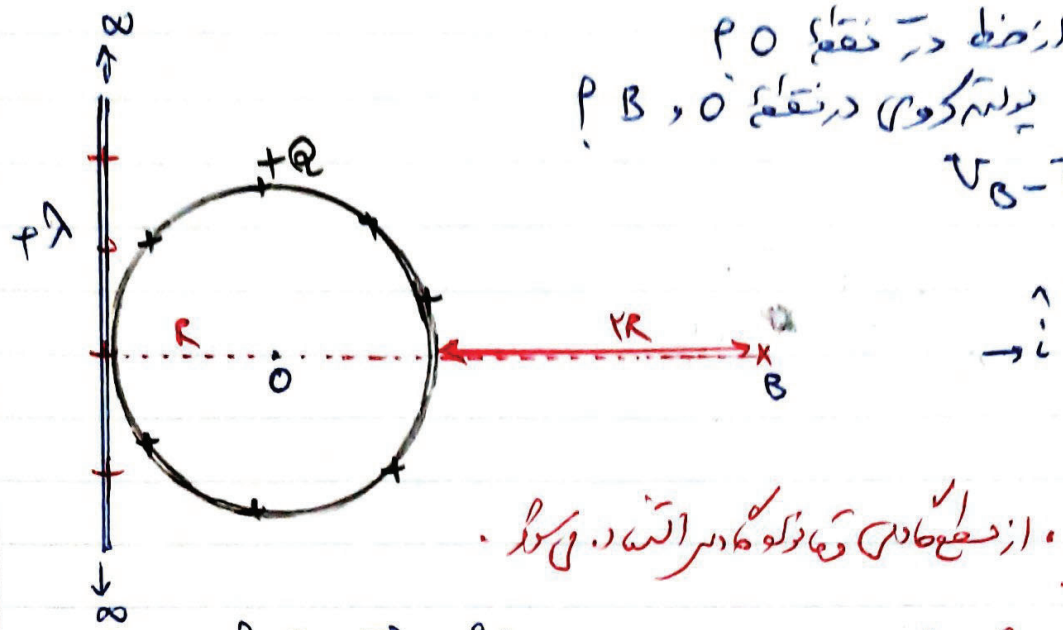
۲۰/A

مثال ۱۶: یک خط بار طول $\lambda+$ و پوسته کروی نارسانای با بار $+Q$.

الف) میدان ناشی از خط در نقطه O

ب) " " پوسته کروی در نقطه O و B

ج) $V_B - V_O = ?$



حل:

برای الف و ب:

یافتن میدان الکتریکی، از سطح گاوسی قرینه که در اختیار می‌گیرد.

الف:

خط بار: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$0 + 0 + E(2\pi r \cancel{l}) = \frac{\lambda \cancel{l}}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \xrightarrow{r=R}$

ناشی از خط

$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}\ \hat{i}$

ناشی از خط در نقطه O

ب:

پوسته کروی بار: $r<R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_O = 0}$

$r>R$: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \xrightarrow{r=B=2R} \boxed{E_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4R^2}}\ \hat{i}$

میدان ناشی از پوسته کروی باردار در نقطه B

ج:

$\boxed{V_B - V_O = -\int_O^B \vec{E}\cdot d\vec{r}}$ یا $V_O - V_B = \int_O^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$V_B - V_O = -\int_O^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_O^B \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r \Big|_{O=R}^{B=4R}$

ناشی از خط

$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4R}{R} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 4$

$V_B - V_O = -\int_O^B \vec{E}\cdot d\vec{r} =$

ناشی از پوسته کروی

ادامه مثال ۱۶:

$$V_B - V_0 = -\int_0^B \vec{E}\cdot d\vec{r} =$$

نسبی از پتانسیل کل

$$= -\int_0^R \underset{\text{داخل کره}}{\vec{E}}\cdot dr - \int_R^{B=3R} \underset{\text{خارج کره}}{\vec{E}}\cdot d\vec{r}$$

$$= 0 - \int_R^{3R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_R^{3R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{3R} - \frac{1}{R}\right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-2}{3R} = \boxed{-\frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 R}}$$

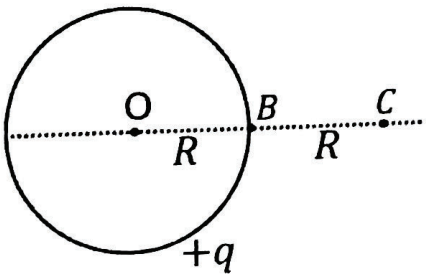
$$\rightarrow \underset{\text{کل}}{V_B - V_0} = \underset{\text{خط باریک}}{(V_B - V_0)} + \underset{\text{پوسته باریک}}{(V_B - V_0)}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 4 - \frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 R} =$$

7. الف) در شکل زیر، یک پوسته کروی نارسانا به شعاع R و با بار $+q$ (که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است)، وجود دارد. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه C و B ، یعنی $(V_B - V_C)$ ، را به دست آورید.

ب) چقدر کار لازم است تا باری به اندازه ی $+2q$ را از نقطه C به نقطه B جابجا کنیم؟

ج) به نظرتان، پتانسیل اطراف یک سطح بادکنکی که با مالش آن را باردار ساخته اید، چقدر است (بر حسب ولت) ؟



یکی از راه های حل مسئله: می توان یک میدان الکتریکی ناشی از یک پوسته کروی نارسانا به شعاع R و با بار q در خارج آن را به دست آورد:

$$\text{III رابطه}: \quad V(r) = \int_r^\infty \vec{E}_{\text{خارج}} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2}\,dr$$

$r > R$

$$= kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_r^\infty = \frac{kq}{r}$$

۲۰

پتانسیل در خارج یک پوسته کروی باردار

$$\Rightarrow V(B) = \frac{kq}{R}, \quad V(C) = \frac{kq}{(2R)} \Rightarrow V_B - V_C = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{2R} = \frac{kq}{2R}$$

۲

ب:

$$W_{C\to B} = (2q)(V_B - V_C) = 2q\left(\frac{kq}{2R}\right) = \frac{kq^2}{R}$$

هدف عالی همت بلند می طلبد

۱

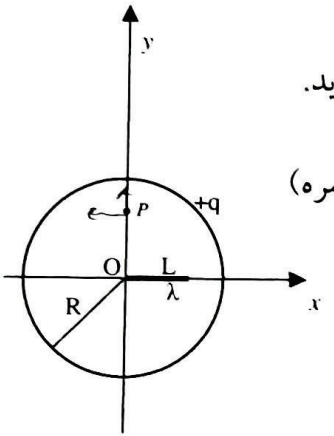
ج:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \simeq 0.0000001 \simeq 600\ \text{ولت}$$

$$\cancel{\Delta V = \frac{\Delta U}{q}}$$

سوال سوم: بار الکتریکی مثبت q به طور یکنواخت روی سطح پوستهٔ کروی نارسانا به شعاع R توزیع شده است. مطابق شکل میلهٔ نازک و نارسانایی به طول L در داخل کره روی محور x قرار دارد. بار الکتریکی با چگالی خطی غیریکنواخت $\lambda = \lambda_0 x$ روی میله نارسانا توزیع شده است.

الف) پتانسیل الکتریکی کل را در نقطه P به فاصله y از مرکز کره(O) محاسبه کنید.



ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف، مولفهٔ y میدان الکتریکی (E_y) را در نقطه P به دست آورید.

ج) کار نیروی خارجی برای انتقال یک پروتون از بی نهایت به مرکز کره را محاسبه کنید. (۹ نمره)